

Agujeros de Gusano en Gravedad (2+1)

Eduard Alexis Larrañaga Rubio
*Universidad Nacional de Colombia and
 Observatorio Astronómico Nacional (OAN)*

Los agujeros de gusano atravesables son objetos que presentan un gran interés en la actualidad debido a sus características geométricas y a su relación con la materia exótica. En el presente trabajo se muestra una revisión de las características de los agujeros de gusano atravesables al estilo de Morris y Thorne, al igual que el proceso de construcción y aspectos de la materia exótica necesaria para mantenerlos. Luego, se utiliza un proceso de juntura para construir dos soluciones específicas tipo agujero de gusano en el formalismo de la gravedad (2+1) con constante cosmológica negativa. Con esta construcción, se obtienen agujeros atravesables y que se encuentran unidos a un espacio-tiempo externo correspondiente al agujero negro BTZ sin momento angular y sin carga eléctrica. Además de esto, se muestra que para mantener este tipo de solución es necesaria la existencia de materia exótica, es decir, materia que viole las condiciones de energía.

I. INTRODUCCIÓN

Hace ya casi 20 años que aparecen los agujeros de gusano tipo Morris-Thorne[2] como una herramienta de enseñanza de la Relatividad General. En 1995, el conocido libro de Visser resume todos los trabajos desarrollados en el área durante el siglo pasado.

En la actualidad este tipo de solución de las ecuaciones de campo de Einstein es una de las más estudiadas, debido a sus interesantes características y en particular, debido a su relación con fuentes de materia que violarían las condiciones de energía. Como es conocido, desde el punto de vista topológico, los agujeros de gusano son iguales a los agujeros negros, pero poseen una superficie mínima denominada la garganta del agujero, la cual es mantenida por una fuente de materia que viola las condiciones de energía y por ello recibe la denominación *exótica*.

Por otro lado, la gravedad $2 + 1$ es una teoría covariante de la geometría del espacio-tiempo, por lo que tiene la misma base conceptual de la Relatividad General (gravedad $3 + 1$), pero el modelo de dimensión $2 + 1$ es mucho más simple, tanto matemática como físicamente, y por ello se cree que puede dar algunas pistas sobre algunos aspectos cuánticos que aún no son comprendidos. Debido a ello a recibido gran atención en los últimos años, y aún más después la aparición de soluciones tipo agujero negro, encontrados por Banados-Teitelboim-Zanelli (BTZ)[15, 16]. Aún cuando estos son modelos de „juguete” en algunos aspectos, los agujeros BTZ siempre han tenido gran importancia debido a su conexión con algunas teorías de cuerdas, su papel en el cómputo microscópico de la entropía y especialmente debido a su utilidad en el estudio de la termodinámica con correcciones cuánticas.

Desde hace algún tiempo se han empezado a considerar soluciones tipo agujero de gusano en la gravedad de $2 + 1$ dimensiones. Por ejemplo Delgaty et.al. [20] realizan un análisis de las propiedades de este tipo de soluciones en universos con constante cosmológica, pero solamente considera un ejemplo específico. Por otro lado, en el trabajo de Aminneborg et.al. [18] se resumen muchas de las propiedades geométricas que tienen estos objetos y son comparadas con las propiedades de los agujeros negros. Por último, Kim et.al. [19] encuentran dos soluciones específicas tomando la gravedad de dimensión $2 + 1$ en presencia de un campo dilatónico.

ahora bien, en este trabajo describimos los aspectos básicos de los agujeros de gusano y de la materia exótica y se encuentran dos soluciones en dimensionalidad $(2 + 1)$ siguiendo el trabajo de Lemos et. al. [4]. Así, en la segunda parte se muestran las características fundamentales de los agujeros, mientras que en la tercera se encuentran las ecuaciones de estructura que estos deben satisfacer. En la cuarta sección se describe el tensor momento-energía y como este ayuda a la creación del agujero, con lo cual la quinta sección describe el proceso de solución de las ecuaciones de campo. En la sexta parte se describe la geometría que se espera para el agujero de gusano, y la séptima sección muestra las propiedades de la materia exótica necesarias para su construcción, la cual se realiza explícitamente en la octava parte. La novena parte encuentra de forma explícita dos tipos de solución específicas y muestra la distribución de materia necesaria para mantenerlas. En la décima sección se realiza una discusión de los resultados obtenidos y se consignan las conclusiones.

II. SOLUCIONES TIPO AGUJERO DE GUSANO

A. Propiedades de los Agujeros de Gusano atravesables

Para restringir las posibles soluciones que obtendremos a los casos de interés, debemos imponer ciertas propiedades que deben poseer las soluciones tipo agujero de gusano[2]. Estas propiedades son:

1. La métrica debe ser solución de las ecuaciones de campo en todo punto del espacio-tiempo.
2. La métrica debe ser esféricamente simétrica y debe ser estática (i.e. debe ser independiente del tiempo).
3. La solución debe poseer una "garganta" que conecte dos regiones del espacio-tiempo que para el caso de la gravedad $(2+1)$ deben corresponder a la métrica del agujero BTZ.
4. En la métrica no debe existir un horizonte de sucesos, ya que este impediría el viaje en dos direcciones dentro del agujero.
5. La fuerza de marea gravitacional dentro del agujero debe ser pequeña (para permitir el viaje de un observador).
6. El tiempo necesario para cruzar el agujero de gusano debe ser razonable.

Estas condiciones se impondrán a lo largo del desarrollo para obtener finalmente las soluciones específicas.

III. ECUACIONES DE ESTRUCTURA DEL AGUJERO DE GUSANO

A. Ecuaciones de Campo de la gravedad $2+1$ con Constante Cosmológica

Debemos asegurar que la métrica que describirá el agujero de gusano es solución de las ecuaciones de campo en todo punto del espacio-tiempo. Ya que deseamos obtener soluciones con constante cosmológica, las ecuaciones de campo estarán dadas por:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} \quad (1)$$

donde $g_{\mu\nu}$ es la métrica, Λ es la constante cosmológica, $T_{\mu\nu}$ es el tensor momento-energía y $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein, definido por:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (2)$$

con $R_{\mu\nu}$ el tensor de Ricci, construido como la contracción del tensor de Riemann (curvatura): $R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha}$; y R es el escalar de curvatura, construido a partir de la contracción del tensor de Ricci: $R = R_{\alpha}^{\alpha}$. Los índices griegos toman los valores 0, 1, 2.

B. La Métrica

La métrica que va representar el agujero de gusano debe poseer una simetría esférica, y además debe ser independiente del tiempo. Esto hace que la forma del elemento de línea, utilizando las coordenadas esféricas usuales (t, r, φ) , sea

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{b(r)}{r}} dr^2 + r^2 d\varphi^2, \quad (3)$$

donde $\Phi(r)$, $b(r)$ son funciones arbitrarias que dependen únicamente de la coordenada radial r , y que estarán restringidas por las condiciones que impondremos a la solución. Como se verá más adelante, la función $\Phi(r)$ determinará el corrimiento al rojo gravitacional, por lo que en la literatura se conoce como "*función de redshift*". Por otro lado, la función $b(r)$ determina la forma espacial de agujero de gusano, por lo que recibe el nombre de "*función de forma*".

C. Tensor de Einstein para la métrica del agujero de gusano

El primer paso para llegar a las ecuaciones de campo es el determinar el tensor de Riemann, el tensor de Ricci y el escalar de curvatura a partir de la métrica dada por la ecuación (3). En el Apéndice A se encuentran explícitamente las componentes no nulas de estos tensores. Finalmente, se obtienen 3 componentes diferentes de cero para el Tensor de Einstein,

$$\begin{aligned} G_{tt} &= \frac{1}{2r^3} e^{2\Phi} [-b + rb'] \\ G_{rr} &= \frac{\Phi'}{r} \\ G_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{2} \left[\Phi' (b - rb') + 2r (r - b) \left((\Phi')^2 + \Phi'' \right) \right], \end{aligned} \quad (4)$$

donde hemos denotado con primas las derivadas con respecto a la coordenada radial r .

D. Cambio de Base

Debemos notar que el tensor de Einstein calculado en el párrafo anterior está en una base vectorial (tetrada) dada por $(\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi)$, que esta asociada con el sistema de coordenadas t, r, φ . Sin embargo, sabemos que somos libres de elegir el sistema de referencia que nosotros deseemos.

De esta manera, para los cálculos subsecuentes, al igual que para las interpretaciones físicas, es más conveniente utilizar como base un conjunto de vectores ortonormales. Estos corresponderán al sistema de referencia propio de un conjunto de observadores que permanezcan en reposo en el sistema coordenado (t, r, φ) ; es decir con r, φ constantes.

Denotaremos los vectores de la base ortonormal por $(\mathbf{e}_{\hat{t}}, \mathbf{e}_{\hat{r}}, \mathbf{e}_{\hat{\varphi}})$; y estarán expresados en términos de los vectores de la base coordenada $(\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi)$ mediante la transformación

$$\mathbf{e}_{\hat{\alpha}} = \Lambda_{\hat{\alpha}}^{\beta} \mathbf{e}_{\beta} \quad (5)$$

donde la matriz de transformación está dada por

$$\Lambda_{\hat{\alpha}}^{\beta} = \text{diag} \left[e^{-\Phi}, \left(1 - \frac{b}{r} \right)^{1/2}, \frac{1}{r} \right]. \quad (6)$$

Explícitamente esta transformación será

$$\mathbf{e}_{\hat{t}} = e^{-\Phi} \mathbf{e}_t \quad (7)$$

$$\mathbf{e}_{\hat{r}} = \left(1 - \frac{b}{r} \right)^{1/2} \mathbf{e}_r \quad (8)$$

$$\mathbf{e}_{\hat{\varphi}} = \frac{1}{r} \mathbf{e}_\varphi \quad (9)$$

Es importante notar que en esta base, el tensor métrico tomará la forma de la relatividad especial, es decir, corresponde al tensor de Minkowski:

$$g_{\alpha\beta} = \mathbf{e}_{\hat{\alpha}} \cdot \mathbf{e}_{\hat{\beta}} = \eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Al cambiar de sistema de referencia, las componentes de todos nuestros tensores cambiarán. De esta manera, por ejemplo, en el sistema de referencia ortonormal las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica estarán dadas por

$$G_{\hat{\mu}\hat{\nu}} + \Lambda \eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}. \quad (11)$$

El tensor de Einstein dado por las ecuaciones (4) tendrá en la base ortonormal la forma más simple (ver Apéndice B para cálculos explícitos):

$$G_{\hat{t}\hat{t}} = \frac{1}{2r^3} [b'r - b] \quad (12)$$

$$G_{\hat{r}\hat{r}} = \left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{\Phi'}{r} \quad (13)$$

$$G_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = \frac{1}{2r^2} \left[\Phi' (b - rb') + 2r (r - b) \left((\Phi')^2 + \Phi'' \right) \right] \quad (14)$$

IV. EL TENSOR MOMENTO-ENERGÍA

Para construir un agujero de gusano con las propiedades de traversabilidad que queremos, debe existir un tensor momento energía diferente de cero.

Las ecuaciones de campo (11) nos dicen que el tensor momento energía es proporcional al tensor de Einstein. Es decir que el tensor $T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ debe tener la misma estructura algebraica que $G_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$; por lo que las únicas componentes que son diferentes de cero deben ser: $T_{\hat{t}\hat{t}}$, $T_{\hat{r}\hat{r}}$ y $T_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}}$.

Ahora bien, ya que estamos trabajando en una base ortonormal ($\mathbf{e}_{\hat{t}}$, $\mathbf{e}_{\hat{r}}$, $\mathbf{e}_{\hat{\varphi}}$) relacionada con el sistema de referencia inercial para los observadores estáticos, estas componentes del tensor momento-energía tienen una interpretación inmediata

$$\begin{aligned} T_{\hat{t}\hat{t}} &= \rho(r) \\ T_{\hat{r}\hat{r}} &= -\tau(r) \\ T_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} &= p(r), \end{aligned} \quad (15)$$

donde $\rho(r)$ es la densidad total de masa y energía (en unidades de kg/m^3); $\tau(r)$ es la tensión radial por unidad de área, es decir es el negativo de la presión radial, $\tau(r) = -p_r(r)$ (en unidades de N/m^2); y $p(r)$ es la presión medida en las direcciones tangenciales, i.e. ortogonales a la dirección radial (en unidades de N/m^2).

A. La Constante Cosmológica como parte del Tensor Momento-Energía

Las ecuaciones de campo de Einstein con constante cosmológica (11) son

$$G_{\hat{\mu}\hat{\nu}} + \Lambda \eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}. \quad (16)$$

Para obtener una interpretación del término cosmológico podemos definir un tensor $T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^{(vac)}$ como

$$T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^{(vac)} = -\Lambda \eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\Lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\Lambda \end{bmatrix}, \quad (17)$$

con lo cual podemos reescribir las ecuaciones de campo como

$$G_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \left(T_{\hat{\mu}\hat{\nu}} + T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^{(vac)} \right) \quad (18)$$

$$G_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \bar{T}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}, \quad (19)$$

donde $\bar{T}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = T_{\hat{\mu}\hat{\nu}} + T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^{(vac)}$ es el tensor momento-energía total. Es evidente ahora que podemos interpretar $T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^{(vac)}$ como el tensor momento-energía asociado con el vacío.

De esta manera, las funciones $\bar{\rho}(r)$, $\bar{\tau}(r)$ y $\bar{p}(r)$ totales estarán dadas por:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(r) &= \rho(r) + \Lambda \\ \bar{\tau}(r) &= \tau(r) + \Lambda \\ \bar{p}(r) &= p(r) - \Lambda \end{aligned} \quad (20)$$

V. SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE CAMPO

Utilizando la forma explícita del tensor de Einstein dado por (12-14) y del tensor momento-energía (15), podemos reemplazar en las ecuaciones de campo de Einstein, para obtener las ecuaciones:

$$\rho(r) = \frac{1}{2r^3} [b'r - b] - \Lambda \quad (21)$$

$$\tau(r) = - \left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{\Phi'}{r} - \Lambda \quad (22)$$

$$p(r) = \frac{1}{2r^2} \left[\Phi' (b - rb') + 2r(r - b) \left((\Phi')^2 + \Phi'' \right) \right] + \Lambda \quad (23)$$

Si tomamos la derivada con respecto a la coordenada r en la ecuación 22 tendremos:

$$\tau'(r) = - \left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{\Phi''}{r} + \left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{\Phi'}{r^2} + \frac{b'r - b}{r^3} \Phi'$$

Utilizando las ecuaciones 21-23 para eliminar b' y Φ'' obtenemos

$$\tau'(r) = - \left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{\Phi''}{r} + \left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{\Phi'}{r^2} + 2(\rho + \Lambda) \Phi' \quad (24)$$

$$\tau'(r) = - \frac{p - \Lambda}{r} - (\rho + \Lambda) \Phi' + \left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{(\Phi')^2}{r} + \left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{\Phi'}{r^2} + 2(\rho + \Lambda) \Phi' \quad (25)$$

$$\tau'(r) = - \frac{p + \left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{\Phi'}{r} + \tau}{r} + \left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{(\Phi')^2}{r} + \left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{\Phi'}{r^2} + \left(\rho - \left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{\Phi'}{r} - \tau\right) \Phi' \quad (26)$$

$$\tau'(r) = (\rho - \tau) \Phi' - \frac{p + \tau}{r} \quad (27)$$

Las ecuaciones (21), (23) y (27) son tres ecuaciones diferenciales que relacionan las cinco funciones desconocidas: b, Φ, ρ, τ y p .

Ahora bien, la forma usual de resolver estas ecuaciones es asumir una tipo específico de materia y energía. Con la ecuación de estado correspondiente al tipo de material se encuentran la tensión en función de la densidad $\tau(\rho)$ y la presión en función de la densidad $p(\rho)$. Así, las dos ecuaciones de estado mas las tres ecuaciones de campo serán cinco ecuaciones para cinco incógnitas. De esta manera, se encontraría la forma que tendrá el espacio-tiempo, es decir las funciones $b(r)$ y $\Phi(r)$.

En el caso de los agujeros de gusano procederemos de una manera diferente. Ya que hemos impuesto ciertas condiciones que deseamos que tenga nuestro espacio-tiempo para describir un agujero de gusano, entonces controlaremos las funciones $b(r)$ y $\Phi(r)$, fijandolas para una geometría conveniente, y, utilizando las ecuaciones de campo, encontraremos la distribución de materia-energía necesaria para obtener tal solución.

VI. GEOMETRÍA DEL AGUJERO DE GUSANO

Antes de continuar con la construcción específica de soluciones tipo agujeros de gusano debemos introducir algunos elementos que nos permitan analizar las cualidades de la geometría que deseamos.

A. La Matemática de las Inmersiones

Ahora utilizaremos los diagramas de inmersión para representar el agujero de gusano y con ello poder obtener información acerca de cómo debe ser la función de forma $b(r)$. Consideremos la métrica del agujero de gusano, dada por la ecuación (3), para un tiempo fijo t ,

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{b}{r}} + r^2 d\varphi^2. \quad (28)$$

Lo que vamos a hacer ahora es construir, en el espacio euclideo tridimensional, una superficie bidimensional con la misma geometría de este corte; es decir que realizaremos una *inmersión* del corte dentro del espacio euclideo.

Para ello consideremos la métrica euclidea en coordenadas cilíndricas

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2 \quad (29)$$

La superficie bidimensional tendrá simetría cilíndrica, y por lo tanto podrá describirse por una función $z = z(r)$. Por lo tanto la métrica de esa superficie se puede escribir como:

$$ds^2 = \left[1 + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 \right] dr^2 + r^2 d\varphi^2 \quad (30)$$

y este elemento de línea debe ser el mismo que el del corte ecuatorial dado por (28). De esta manera, para realizar la inmersión, la función $z(r)$ debe satisfacer:

$$1 + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 = \left(1 - \frac{b}{r} \right)^{-1} \quad (31)$$

$$\frac{dz}{dr} = \pm \left(\frac{r}{b} - 1 \right)^{-1/2} \quad (32)$$

Para que esta geometría describa un agujero de gusano, la solución debe poseer un radio mínimo $r = b(r) = r_m$, que llamaremos la "garganta" del agujero, y para el cual la superficie inmersa es vertical, es decir que en este punto $\frac{dz}{dr} \rightarrow \infty$. Debido a esta divergencia de $\frac{dz}{dr}$, la coordenada r no es la apropiada cerca a la garganta. Por ello es mejor utilizar la distancia radial propia (medida por observadores estáticos), definida por

$$l(r) = \pm \int_{r_m}^r \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{b}{r}}} \quad (33)$$

donde el signo $+$ se utiliza para la parte superior del agujero (i.e. $z > 0$) y el signo $-$ para la parte inferior ($z < 0$). El límite superior máximo en la integración corresponderá al radio a en el cuál se situa la boca del agujero de gusano.

Ya que la distancia radial propia $l(r)$ debe permanecer finita en todo punto, debemos exigir que

$$1 - \frac{b(r)}{r} \geq 0. \quad (34)$$

Las ecuaciones (32) y (33) implican que para la superficie inmersa se cumple

$$\frac{dz}{dl} = \pm \sqrt{\frac{b}{r}} \quad (35)$$

$$\frac{dr}{dl} = \pm \sqrt{1 - \frac{b}{r}}. \quad (36)$$

De esta manera, la superficie $z(r)$ puede tener una forma general, y la función $b(r)$, en efecto, define la forma del agujero de gusano.

B. Ausencia de un Horizonte

Para asegurar que el agujero de gusano permita el viaje hacia adentro y hacia afuera, debemos exigir que no existan horizontes de eventos. En el caso de métricas estáticas, es fácil reconocer la presencia de tales horizontes: estos corresponderán a las superficies no singulares en las cuales

$$g_{tt} = -e^{2\Phi} \rightarrow 0,$$

es decir, aquellos puntos donde el intervalo de tiempo propio es nulo mientras transcurre un tiempo coordinado finito. De esta manera, para asegurar el viaje en las dos direcciones debemos exigir que la función $\Phi(r)$ sea finita en todo punto.

VII. PROPIEDADES DEL TENSOR MOMENTO-ENERGÍA QUE GENERA EL AGUJERO DE GUSANO

Como hemos visto, el método que se utiliza para solucionar las ecuaciones de campo en el contexto de los agujeros de gusano es diferente al usual. En este caso impondremos ciertas condiciones a la función de forma $b(r)$, y utilizando las ecuaciones de campo (21) a (23) se obtienen ciertas condiciones sobre la densidad ρ , la tensión radial τ y la presión lateral p , de tal manera que se genera el espacio-tiempo deseado. Sin embargo, esta forma de actuar nos llevará a la necesidad de utilizar un tipo muy particular de materia, el cuál denominaremos "exótica" debido a sus propiedades.

A. Materia Exótica

Para comprobar qué propiedades debe cumplir el tensor momento-energía necesario para lograr la configuración de agujero de gusano, definiremos la siguiente función adimensional

$$\varsigma = \frac{\tau - \rho}{|\rho|}. \quad (37)$$

Utilizando las ecuaciones (21) y (22) esta función puede escribirse como:

$$\varsigma = \frac{\tau - \rho}{|\rho|} = \frac{-2r^2 \left(1 - \frac{b}{r}\right) \Phi' - (b'r - b)}{|b'r - b - 2r^3 \Lambda|} \quad (38)$$

Para que el espacio-tiempo descrito corresponda a un agujero de gusano debe exigirse que este se conecte suavemente con el espacio-tiempo exterior (el cual en nuestro caso es asintóticamente AdS). Esto significa que debemos exigir que la garganta de la superficie inmersa debe "abrirse" hacia afuera, tal como se observa en las gráficas que representan agujeros de gusano.

Ahora bien, esta condición de "abrirse" hacia afuera se representa matemáticamente imponiendo al inverso de la función de inmersión $r(z)$ la condición

$$\frac{d^2 r}{dz^2} > 0. \quad (39)$$

Utilizando la ecuación (32) tenemos

$$\frac{dr}{dz} = \pm \left(\frac{r}{b} - 1\right)^{1/2}, \quad (40)$$

y diferenciando con respecto a z obtenemos

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = \pm \frac{1}{2} \left(\frac{b - rb'}{b^2}\right). \quad (41)$$

Es decir que la condición de "abrirse" hacia afuera se puede escribir como

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = \frac{b - rb'}{2b^2} > 0 \quad \text{en la garganta o cerca de ella.} \quad (42)$$

De esta manera, la ecuación (38) será

$$\varsigma = \frac{\tau - \rho}{|\rho|} = \frac{2b^2}{|2b^2 \frac{d^2 r}{dz^2} + 2r^3 \Lambda|} \frac{d^2 r}{dz^2} - 2 \left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{r^2 \Phi'}{|2b^2 \frac{d^2 r}{dz^2} + 2r^3 \Lambda|}. \quad (43)$$

Ahora bien, sabemos que cerca a la garganta tenemos $(1 - \frac{b}{r}) \Phi' \rightarrow 0$, y por ello, la condición de "abrirse" hacia afuera se escribirá ahora como

$$\varsigma_m = \frac{\tau_m - \rho_m}{|\rho_m|} > 0, \quad (44)$$

donde el subíndice m muestra que estamos evaluando la expresión en la garganta o cerca de ella.

La condición $\tau_m > \rho_m$ que impone (44) nos dice que, en la garganta, la tensión τ_m debe ser mayor que la densidad total de masa-energía ρ_m . Cualquier material que cumpla esta propiedad ($\tau_m > \rho_m > 0$) será llamado "exótico". Para comprender por qué esta propiedad es problemática, debemos repasar las llamadas *condiciones de energía*.

B. Condiciones de Energía

Durante los años 60's y 70's una de las conjeturas más fuertemente arraigadas dentro de la física era la de que ningún observador puede medir una densidad de energía negativa. Esta conjetura es la que actualmente se conoce como *condición de energía débil* (WEC). Matemáticamente podemos escribir esta condición diciendo que el tensor momento-energía siempre satisface[7]

$$T_{\mu\nu} W^\mu W^\nu \geq 0, \quad (45)$$

para cualquier vector como de tiempo W^μ .

A la par con esta condición, surge la denominada *condición de energía dominante* (DEC), la cual puede interpretarse diciendo que ningún observador puede medir energías negativas y además el vector de flujo de energía local nunca es como de espacio. Matemáticamente esta condición dice que para cualquier vector como de tiempo W^μ se cumple

$$T_{\mu\nu} W^\mu W^\nu \geq 0 \quad \text{y} \quad T^{\mu\nu} W_\mu \quad \text{NO es un vector como de espacio.} \quad (46)$$

Por último, también se tiene la llamada *condición de energía fuerte* (SEC) que impone la condición

$$T_{\mu\nu} W^\mu W^\nu \geq \frac{1}{2} T W^\sigma W_\sigma \quad (47)$$

para cualquier vector como de tiempo W^μ y donde T es la traza de $T_{\mu\nu}$.

Existe además otra condición, denominada *condición de energía nula* (NEC), introducida un poco después y que se escribe matemáticamente diciendo que para cualquier vector nulo V^μ se cumple

$$T_{\mu\nu} V^\mu V^\nu \geq 0. \quad (48)$$

Para visualizar mejor estas condiciones de energía tomemos el caso particular de un fluido perfecto con tensor de momento energía diagonal $T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p)$. En este caso, las condiciones de energía serán (ver pág. 81 de [6])

$$NEC \implies (\rho + p) \geq 0 \quad (49)$$

$$WEC \implies \rho \geq 0 \quad \text{y} \quad (\rho + p) \geq 0 \quad (50)$$

$$SEC \implies (\rho + 3p) \geq 0 \quad \text{y} \quad (\rho + p) \geq 0 \quad (51)$$

$$DEC \implies \rho \geq 0 \quad \text{y} \quad (\rho \pm p) \geq 0. \quad (52)$$

De estas ecuaciones se puede observar claramente que las condiciones de energía son en realidad relaciones lineales entre la densidad ρ y la presión p de la materia-energía que genera la curvatura del espacio-tiempo. Además, es importante notar que estas relaciones no son demostrables, ya que son solo conjeturas que suenan "razonables" físicamente[7] debido a que la masa y la mayoría de los campos que se conocen las cumplen.

C. Agujeros de Gusano y las Condiciones de Energía

La naturaleza exótica del material que produce un agujero de gusano, dada por la condición $\tau_m > \rho_m$, es problemática debido a que conlleva a la violación de las condiciones de energía.

Consideremos un observador que se mueve a través de la garganta de un agujero de gusano con una velocidad v muy grande ($\gamma \gg 1$). La densidad de energía que él observa es la proyección del tensor momento-energía (dado por 15) con su vector de base temporal $\mathbf{e}_{\hat{o}} = \gamma \mathbf{e}_{\hat{t}} \mp \gamma \left(\frac{v}{c}\right) \mathbf{e}_{\hat{r}}$. De esta manera, la densidad estará dada por:

$$T_{\hat{o}\hat{o}} = \gamma^2 T_{\hat{t}\hat{t}} \mp 2\gamma^2 \left(\frac{v}{c}\right)^2 T_{\hat{t}\hat{r}} + \gamma^2 \left(\frac{v}{c}\right)^2 T_{\hat{r}\hat{r}} \quad (53)$$

$$= \gamma^2 \left[\rho_m c^2 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \tau_m \right] \quad (54)$$

$$= \gamma^2 (\rho_m c^2 - \tau_m) + \tau_m \quad (55)$$

Por lo tanto, si se cumple $\tau_m > \rho_m$, y el observador se mueve lo suficientemente rápido (i.e. con un γ suficientemente grand), entonces éste podrá medir una densidad de masa-energía negativa.

D. Violación de las Condiciones de Energía

Como se dijo antes, las condiciones de energía no son demostrables, son solamente conjeturas. Sin embargo, son fundamentales en la demostración de ciertos teoremas importantes como por ejemplo en el teorema de "masa positiva", el cual dice que cualquier objeto compuesto de materia que cumpla la DEC, nunca antigravita. También son utilizadas en ciertos teoremas que aseguran la creación de singularidades en situaciones cosmológicas [7] y en el teorema del "Censor Cósmico" [6].

Aún más importante es que las condiciones de energía también son utilizadas en la demostración del teorema del "aumento de área" conocido como la "segunda ley de la termodinámica" de agujeros negros. Este nos asegura que si toda la materia-energía alrededor de un agujero negro satisface la SEC, entonces el área de horizonte de eventos del agujero nunca decrece [8].

Sin embargo, el mismo Hawking demostró que los agujeros negros no-rotantes pueden evaporarse, y por lo tanto su área decrecerá, violando así la segunda ley [9, 10]. Este hecho hace evidente la posibilidad de que los campos cuánticos violen las condiciones de energía. Más exactamente, lo que se obtiene es que pueden existir ciertos estados cuánticos en los que el valor esperado renormalizado del tensor momento-energía viola las condiciones de energía.

El ejemplo más claro de este hecho es el proceso de creación de partículas. Por ejemplo, cualquier observador estático justo afuera del horizonte de eventos de un agujero de Schwarzschild (rodeado por vacío) ve un valor esperado para la densidad de energía negativo. Esta densidad negativa de energía es la que se asocia precisamente con la creación de partículas cerca al horizonte, las cuales a su vez son las responsables del flujo de energía negativo hacia el horizonte, que tiene como consecuencia la evaporación del agujero negro.

Otra situación bastante conocida en la cual se violan las condiciones de energía es el denominado Efecto Casimir, en el cual se considera la energía del vacío asociada con un campo electromagnético en la región entre dos placas reflectoras planas paralelas [11]. Debido a la condición de frontera impuesta por la presencia de las placas los modos posibles para el campo electromagnético están restringidos y el campo sufre una distorsión topológica que conlleva a un valor esperado del tensor momento-energía negativo. Debido a que este valor esperado no es nulo, aparece una fuerza de atracción entre las dos placas conductoras aún cuando estas sean eléctricamente neutras. El efecto Casimir pudo ser detectado experimentalmente por Sparnaay (1958) y Tabor y Winterton (1969); lo que muestra de nuevo la violación de las condiciones de energía.

Utilizando este efecto, Morris et.al. [3] muestran como un campo eléctrico o magnético radial cerca de la boca de un agujero de gusano se comporta casi de manera exótica.

Ahora bien, aún cuando las observaciones han mostrado violaciones producidas en pequeños sistemas cuánticos, hoy en día no es claro si pueden existir violaciones de las condiciones de energía a nivel macroscópico. Así, estas observaciones sirven para advertirnos que no debemos asumir que es imposible la existencia del material "exótico" necesario para mantener un agujero de gusano. De hecho, la existencia de materia con masa gravitacional negativa

es una posibilidad que se ha estudiado repetidamente en la historia de la física, y la no observación de esta clase de materia en nuestra localidad del universo puede ser explicada al asumir que debido al tipo de interacción que tendría con la materia ordinaria (gravitacionalmente positiva), la materia gravitacional negativa habría sido expulsada a distancia extragalácticas.

VIII. CONSTRUCCIÓN DE LOS AGUJEROS DE GUSANO CON CONSTANTE COSMOLÓGICA

Para realizar la construcción de los agujeros de gusano utilizaremos las ecuaciones que relacionan las funciones b, Φ, ρ, τ y p ,

$$\begin{aligned}\rho(r) &= \frac{1}{2r^3} [b'r - b] - \Lambda \\ \tau(r) &= - \left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{\Phi'}{r} - \Lambda \\ p(r) &= \frac{1}{2r^2} \left[\Phi' (b - rb') + 2r(r - b) \left((\Phi')^2 + \Phi'' \right) \right] + \Lambda \\ \tau'(r) &= (\rho - \tau) \Phi' - \frac{p + \tau}{r}.\end{aligned}\tag{56}$$

Ya que trabajaremos con el término de constante cosmológica, debemos distinguir entre la solución interior, (i.e. $r < a$, con Λ_{int}) y la solución exterior (i.e. $r > a$, con Λ_{ext}).

A. Solución Interior

La solución interior debe tener la forma

$$ds^2 = -e^{2\Phi^{int}(r)} c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{b^{int}(r)}{r}} dr^2 + r^2 d\varphi^2.\tag{57}$$

Para encontrar explícitamente las funciones $\Phi_{int}(r)$ y $b_{int}(r)$ en el interior, es decir para radios $r < a$, en las ecuaciones (56) debemos utilizar Λ_{int} . Para no sobrecargar las ecuaciones no colocaremos el índice int en Φ y b . De esta manera tenemos:

$$\rho(r) = \frac{1}{2r^3} [b'r - b] - \Lambda_{int}\tag{58}$$

$$\tau(r) = - \left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{\Phi'}{r} - \Lambda_{int}\tag{59}$$

$$p(r) = \frac{1}{2r^2} \left[\Phi' (b - rb') + 2r(r - b) \left((\Phi')^2 + \Phi'' \right) \right] + \Lambda_{int}\tag{60}$$

De la ecuación para la tensión, vemos que en la garganta del agujero ($b(r_m) = r_m$), se tiene

$$\tau(r_m) = - \left(1 - \frac{r_m}{r_m}\right) \frac{\Phi'}{r_m} - \Lambda_{int}\tag{61}$$

$$\tau(r_m) = -\Lambda_{int}.\tag{62}$$

Es decir que la tensión radial en la garganta es positiva para agujeros en los cuales la estructura interna sea tal que $\Lambda_{int} < 0$.

De manera similar, la tensión en la garganta es negativa, es decir es una presión, para agujeros de gusano en los cuales la estructura interna sea tal que $\Lambda_{int} > 0$.

Por otro lado, la tensión radial total en la garganta es nula!

$$\bar{\tau}(r_m) = \tau(r_m) + \Lambda_{int} = 0.\tag{63}$$

B. Solución Exterior

En la parte exterior del agujero de gusano ($r > a$) consideraremos una geometría para un espacio-tiempo vacío; es decir que el tensor momento-energía en el exterior será nulo, $T_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = 0$, lo que implica directamente que

$$\rho(r) = \tau(r) = p(r) = 0. \quad (64)$$

Sin embargo, esto no implica que la constante cosmológica exterior Λ_{ext} sea nula. Las ecuaciones (56) serán ahora

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2r^3} [b'r - b] - \Lambda_{ext} \\ 0 &= -\left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{\Phi'}{r} - \Lambda_{ext} \\ 0 &= \frac{1}{2r^2} \left[\Phi' (b - rb') + 2r(r - b) \left((\Phi')^2 + \Phi'' \right) \right] + \Lambda_{ext}. \end{aligned} \quad (65)$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones diferenciales encontramos la métrica para el exterior del agujero de gusano (ver Apéndice C para los detalles),

$$ds^2 = -(-M - \Lambda_{ext}r^2) dt^2 + \frac{dr^2}{(-M - \Lambda_{ext}r^2)} + r^2 d\varphi^2. \quad (66)$$

La constante cosmológica puede tomar valores positivos o negativos. En nuestro caso nos restringiremos al caso con $\Lambda_{ext} < 0$, y ya que la constante cosmológica tiene unidades de inverso de longitud al cuadrado, tomaremos, siguiendo el trabajo de Banados et. al.[15, 17]

$$\Lambda_{ext} = -\frac{1}{l^2}. \quad (67)$$

Por ello, la solución externa que utilizaremos será

$$ds^2 = -\left(-M + \frac{r^2}{l^2}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{(-M + \frac{r^2}{l^2})} + r^2 d\varphi^2. \quad (68)$$

Es importante notar que esta solución tiene singularidades en los radios

$$r_{\pm} = \pm\sqrt{Ml} \quad (69)$$

El valor r_+ corresponde al horizonte de eventos de la solución tipo agujero negro, por lo que para satisfacer las condiciones de traversabilidad el radio de la boca de nuestro agujero de gusano debe ser mayor ($a > r_+$).

C. Condiciones de Unión

Para lograr unir las soluciones exterior e interior encontradas debemos aplicar las condiciones matemáticas necesarias. Si llamamos S la superficie de frontera entre las regiones exterior e interior, debemos imponer inicialmente que la métrica sea continua en S , es decir que $g_{\mu\nu}^{int}|_S = g_{\mu\nu}^{ext}|_S$. Sin embargo, esta condición no es suficiente para lograr la unión de las dos regiones. Además de esta, uno de los formalismos desarrollados impone además la condición de continuidad en la curvatura extrínseca sobre la superficie S (i.e. la continuidad de la segunda forma fundamental de S). Este es conocido como formalismo de Darmois-Israel. Afortunadamente, cuando el espacio-tiempo tiene alta simetría (como en este caso, ya que se posee simetría esférica), la unión puede realizarse utilizando directamente las ecuaciones de campo.

De esta manera encontraremos la densidad de energía y esfuerzos en la superficie S necesarios para lograr la unión entre las regiones exterior e interior. Cuando no existen términos de energía ni de esfuerzos en S se dice que la unión es una *superficie frontera*, mientras que cuando existen términos de energía o esfuerzo, la unión es llamada un *cascarón-delgado* (*thin-shell*).

1. Continuidad de la Métrica

Ya que tanto la métrica interior como la exterior tienen simetría esférica, la condición de continuidad de la métrica $g_{\mu\nu}|_S = g_{\mu\nu}^{ext}|_S$ está asegurada para la componente $g_{\varphi\varphi}$. De esta manera, solamente es necesario imponer las condiciones de continuidad

$$\begin{aligned} g_{tt}^{int}|_{r=a} &= g_{tt}^{ext}|_{r=a} \\ g_{rr}^{int}|_{r=a} &= g_{rr}^{ext}|_{r=a}. \end{aligned} \quad (70)$$

Utilizando las ecuaciones (57) y (66) tenemos que estas condiciones de continuidad son

$$e^{2\Phi(a)} = -M + \frac{a^2}{l^2} \quad (71)$$

$$1 - \frac{b(a)}{a} = -M + \frac{a^2}{l^2}, \quad (72)$$

las cuales se pueden reescribir como

$$\Phi(a) = \frac{1}{2} \ln \left(-M + \frac{a^2}{l^2} \right) \quad (73)$$

$$b(a) = (1 + M) a - \frac{a^3}{l^2}. \quad (74)$$

De esta última ecuación se puede obtener inmediatamente que la masa del agujero de gusano estará dada por

$$M = \frac{b(a)}{a} + \frac{a^2}{l^2} - 1. \quad (75)$$

D. Ecuaciones de Campo

Para completar la unión de las regiones interior y exterior utilizaremos las ecuaciones de campo (1). Además asumiremos, para simplificar los cálculos, que los observadores estáticos en el interior miden fuerzas de marea nulas, es decir que $\Phi^{int} = \text{constante}$, y por lo tanto $\Phi'^{int} = 0$. Puesto que hemos impuesto la continuidad de la métrica, y ya que el espacio tiempo es esféricamente simétrico, solo falta imponer la condición de continuidad en las derivadas radiales de la métrica. Como sabemos, las segundas derivadas de la métrica están relacionadas con el tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$, o en la base ortonormal con $G_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$; y además este es proporcional al tensor momento energía $T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ por las ecuaciones de campo.

Si las componentes del tensor momento-energía no son nulas en la superficie S (thin-shell), podremos escribir este tensor de manera proporcional a un delta de Dirac,

$$T_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = t_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \delta(\hat{r} - \hat{a}), \quad (76)$$

donde $\hat{r} = \sqrt{g_{rr}}r$ es la distancia propia medida dentro del thin-shell. Así, para encontrar $t_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ debemos utilizar

$$\int_{int}^{ext} G_{\hat{\mu}\hat{\nu}} d\hat{r} = \int_{int}^{ext} t_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \delta(\hat{r} - \hat{a}) d\hat{r}, \quad (77)$$

donde \int_{int}^{ext} es una integral infinitesimal a lo largo de la thin-shell. Utilizando la propiedad de la función delta de Dirac

$$\int g(x) \delta(x - x_o) dx = g(x_o), \quad (78)$$

tenemos

$$t_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \int_{int}^{ext} G_{\hat{\mu}\hat{\nu}} d\hat{r}. \quad (79)$$

1. Presión Superficial

Consideraremos inicialmente los términos de densidad de energía superficial y presión superficial tangencial.

De (12) vemos que la componente $G_{\hat{t}\hat{t}}$ depende únicamente de primeras derivadas de la métrica. De esta manera la densidad de energía superficial será

$$\Sigma = t_{\hat{t}\hat{t}} = \int_{int}^{ext} G_{\hat{t}\hat{t}} d\hat{r}. \quad (80)$$

Al realizar la integración se obtendrán solamente funciones de la métrica que por la condición impuesta serán continuas. Ya que al realizar la integración se evalúan los términos en la parte exterior e interior, el resultado será cero. De esta manera

$$\Sigma = 0. \quad (81)$$

Por lo tanto, solamente hace falta encontrar la presión superficial tangencial \mathcal{P} . De las ecuaciones (12) vemos que la componente $G_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}}$ tiene términos que dependen de primeras derivadas de la métrica, y por lo tanto no contribuyen a la integral; pero tiene además un término de la forma $(1 - \frac{b}{r})\Phi''$. Así, la presión tangencial en la superficie será

$$\mathcal{P} = t_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = \int_{int}^{ext} G_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} d\hat{r} \quad (82)$$

$$\mathcal{P} = \left[\sqrt{1 - \frac{b(a)}{a}} \Phi'_{|int}^{ext} \right]. \quad (83)$$

Ya que asumimos que un observador estático interno no siente fuerzas de marea tenemos $\Phi'^{int} = 0$, y por otro lado tenemos

$$\begin{aligned} \Phi'^{ext} &= \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{2} \ln \left(-M + \frac{r^2}{l^2} \right) \right]_{r=a} \\ \Phi'^{ext} &= \frac{a}{l^2} \left(-M + \frac{a^2}{l^2} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (84)$$

Utilizando (72) tenemos

$$\Phi'^{ext} = \frac{\frac{a}{l^2}}{\left(1 - \frac{b(a)}{a} \right)}, \quad (85)$$

y de esta manera, la presión tangencial en la superficie es

$$\mathcal{P} = \frac{\frac{a}{l^2}}{\sqrt{1 - \frac{b(a)}{a}}} \quad (86)$$

$$\mathcal{P} = \frac{\frac{a}{l^2}}{\sqrt{-M + \frac{a^2}{l^2}}}. \quad (87)$$

Notese que en este caso, la Presión tangencial en la superficie es siempre positiva, bajo la condición

$$a^2 \geq Ml^2, \quad (88)$$

la cual corresponde a decir que la boca del agujero de gusano debe estar fuera del horizonte de eventos del agujero negro BTZ, tal como se quiere al buscar un agujero de gusano atravesable.

2. Presión Radial

La componente radial de las ecuaciones de campo de Einstein (22) permite escribir para la región interior y exterior

$$\tau^{int}(r) = - \left(1 - \frac{b^{int}}{r}\right) \frac{\Phi'^{int}}{r} - \Lambda^{int} \quad (89)$$

$$\tau^{ext}(r) = - \left(1 - \frac{b^{ext}}{r}\right) \frac{\Phi'^{ext}}{r} - \Lambda^{ext} \quad (90)$$

Debido a que hemos asumido que los observadores estáticos en el interior miden fuerzas de marea nulas, es decir que $\Phi'^{int}(a) = 0$, obtenemos

$$\tau^{int}(r) = -\Lambda^{int} \quad (91)$$

$$\tau^{ext}(r) = - \left(1 - \frac{b^{ext}}{r}\right) \frac{\Phi'^{ext}}{r} - \Lambda^{ext} \quad (92)$$

Utilizando la ecuación (85) para Φ'^{ext} y la Presión tangencial en la superficie dada por (86) tenemos

$$\tau^{ext}(a) = - \left(1 - \frac{b^{ext}(a)}{a}\right) \frac{\frac{a}{l^2}}{\left(1 - \frac{b^{ext}(a)}{a}\right)a} - \Lambda^{ext} \quad (93)$$

$$\tau^{ext}(a) = -\mathcal{P} \frac{1}{a} \sqrt{1 - \frac{b^{ext}(a)}{a}} - \Lambda^{ext} \quad (94)$$

$$\tau^{ext}(a) = -\frac{\mathcal{P}}{a} \sqrt{-M + \frac{a^2}{l^2}} - \Lambda^{ext} \quad (95)$$

Esta ecuación nos relaciona la tensión radial en la superficie con la presión tangencial de la thin-shell.

IX. SOLUCIONES ESPECÍFICAS

Es posible definir varias soluciones que representan agujeros de gusano. En general estas soluciones pueden tener thin-shells en la superficie donde realizamos la unión entre el exterior y el interior (es decir que tienen una presión superficial tangencial $\mathcal{P} \neq 0$). Además, asumiremos que en el interior se tiene $\Phi'^{int} = 0$ para asegurar la transversabilidad del agujero.

A. Unión con $\mathcal{P} = 0$ (Superficie Frontera)

La solución exterior tiene $\tau_{ext} = 0$ y $\Lambda_{ext} = -\frac{1}{l^2} < 0$. Consideraremos primero el caso con $\mathcal{P} = 0$. De esta manera, la ecuación (95) será

$$\Lambda^{ext} = 0. \quad (96)$$

Esto muestra que no existe solución tipo agujero de gusano con $\mathcal{P} = 0$ en universos con constante cosmológica negativa.

B. Unión con $\mathcal{P} \neq 0$ (Thin-Shell)

Tenemos ahora el caso en el que $\tau_{ext} = 0$ y $\Lambda_{ext} < 0$ pero ahora con una thin-shell, i.e. $\mathcal{P} \neq 0$. La ecuación (95) será ahora

$$\frac{\mathcal{P}}{a} \sqrt{-M + \frac{a^2}{l^2}} = -\Lambda^{ext} = \frac{1}{l^2} \quad (97)$$

y la función de forma estará dada por (74), es decir

$$b(a) = (1 + M)a - \frac{a^3}{l^2} \quad (98)$$

y por ello la masa del agujero es (75)

$$M = \frac{b(a)}{a} + \frac{a^2}{l^2} - 1. \quad (99)$$

Se observa inmediatamente que la masa es cero si $b(a) = a - \frac{a^3}{l^2}$, es positiva si $b(a) > a - \frac{a^3}{l^2}$ y es negativa cuando $b(a) < a - \frac{a^3}{l^2}$.

Para el desarrollo subsecuente, consideraremos el caso límite $b(a) = a - \frac{a^3}{l^2}$, es decir cuando el agujero de gusano no tiene masa. Escogiendo la función de forma tenemos diferentes agujeros de gusano. Consideraremos aquí dos posibles funciones.

1. Consideremos las funciones

$$\begin{aligned} b(r) &= (r_m r)^{\frac{1}{2}} \\ \Phi(r) &= \Phi_o \end{aligned} \quad (100)$$

donde r_m es el radio de la garganta. Con esto tenemos

$$\begin{aligned} b'(r) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_m}{r}} \\ \Phi'(r) &= 0. \end{aligned} \quad (101)$$

Las ecuaciones de Einstein (58) a (60) se podrán escribir como

$$\bar{\rho}(r) \equiv \rho(r) + \Lambda_{int} = -\frac{1}{4r^3} \sqrt{r_m r} \quad (102)$$

$$\bar{\tau}(r) \equiv \tau(r) + \Lambda_{int} = 0 \quad (103)$$

$$\bar{p}(r) \equiv p(r) - \Lambda_{int} = 0. \quad (104)$$

Por la ecuación (98) tenemos

$$b(a) = (r_m a)^{\frac{1}{2}} = a - \frac{a^3}{l^2} \quad (105)$$

$$\frac{a^2}{l^2} = 1 - \left(\frac{r_m}{a} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (106)$$

Para que la solución corresponda a un agujero de gusano y no a un agujero negro, debemos imponer la condición $a > r_+$, con lo que obtenemos la condición

$$a > \sqrt{M}l \quad (107)$$

$$\frac{a^2}{l^2} > M \quad (108)$$

$$1 - \left(\frac{r_m}{a}\right)^{\frac{1}{2}} > M \quad (109)$$

$$\left(\frac{r_m}{a}\right)^{\frac{1}{2}} < 1 - M \quad (110)$$

$$a > \frac{r_m}{(M-1)^2}. \quad (111)$$

Además, la constante Φ_o debe ser tal que $e^{2\Phi(a)} = -M + \frac{a^2}{l^2}$ (ecuación 71), es decir que

$$e^{2\Phi_o} = -M + \frac{a^2}{l^2} \quad (112)$$

Así, la métrica que describe el agujero será: en el interior, ($r_m \leq r \leq a$),

$$ds^2 = - \left(-M + \frac{a^2}{l^2} \right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \sqrt{\frac{r_m}{r}} \right)} + r^2 d\varphi^2 \quad (113)$$

y en el exterior, ($a \leq r \leq \infty$),

$$ds^2 = - \left(-M + \frac{r^2}{l^2} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(-M + \frac{r^2}{l^2} \right)} + r^2 d\varphi^2. \quad (114)$$

2. Otra opción es tomar las funciones

$$\begin{aligned} b(r) &= \frac{r_m^2}{r} \\ \Phi(r) &= \Phi_o \end{aligned} \quad (115)$$

con r_m el radio de la garganta. Tenemos ahora

$$\begin{aligned} b'(r) &= -\frac{r_m^2}{r^2} \\ \Phi'(r) &= 0. \end{aligned} \quad (116)$$

Las ecuaciones de campo están dadas por

$$\bar{\rho}(r) \equiv \rho(r) + \Lambda_{int} = \frac{1}{2r^3} \left[-\frac{r_m^2}{r^2} r - \frac{r_m^2}{r} \right] = -\frac{r_m^2}{r^5} \quad (117)$$

$$\bar{\tau}(r) \equiv \tau(r) + \Lambda_{int} = 0 \quad (118)$$

$$\bar{p}(r) \equiv p(r) - \Lambda_{int} = 0. \quad (119)$$

Ahora bien, debido a la ecuación (??) tenemos

$$b(a) = \frac{r_m^2}{a} = a - \frac{a^3}{l^2} \quad (120)$$

$$r_m^2 = a^2 - \frac{a^4}{l^2}. \quad (121)$$

Es decir que la boca del agujero de gusano debe estar en

$$a^2 = \frac{l^2}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 - 4 \frac{r_m^2}{l^2}} \right]. \quad (122)$$

Para que la solución corresponda a un agujero de gusano debemos imponer la condición $a > r_+$, de donde tenemos

$$a^2 > Ml^2$$

$$\frac{l^2}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 - 4 \frac{r_m^2}{l^2}} \right] > Ml^2 \quad (123)$$

$$1 \pm \sqrt{1 - 4 \frac{r_m^2}{l^2}} > 2M. \quad (124)$$

La constante Φ_o debe ser tal que $e^{2\Phi(a)} = -M + \frac{a^2}{l^2}$ (ecuación 71), por lo cual

$$e^{2\Phi_o} = -M + \frac{a^2}{l^2}. \quad (125)$$

Así, la métrica en el interior del agujero de gusano, $r_m \leq r \leq a$, está dada por

$$ds^2 = - \left(-M + \frac{a^2}{l^2} \right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_m^2}{r^2} \right)} + r^2 d\varphi^2 \quad (126)$$

y la métrica exterior, $a \leq r \leq \infty$, será

$$ds^2 = - \left(-M + \frac{r^2}{l^2} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(-M + \frac{r^2}{l^2} \right)} + r^2 d\varphi^2. \quad (127)$$

X. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos considerado el método usual de construcción de agujeros de gusano, realizando la unión de dos espacio-tiempo dentro del formalismo de la gravedad (2+1) en un universo con constante cosmológica negativa. En la región interna se exige una métrica que posea las características geométricas y de traversabilidad deseadas para el agujero de gusano, mientras que en la región exterior se exige que la métrica corresponda al agujero negro BTZ. Con ello se logran encontrar explícitamente dos soluciones específicas que corresponden a agujeros de gusano atravesables y que en su región exterior corresponden a soluciones BTZ. Por último, del análisis realizado, se muestra que las dos soluciones específicas encontradas necesitan de materia exótica para mantenerse.

-
- [1] A. Einstein y N. Rosen, *The Particle Problem in the General Theory of Relativity*. Phys. Rev. **48**, 73 (1935)
 - [2] M. Morris, K. Thorne. *Wormholes in Spacetime and their use for Interstellar Travel: A Tool for Teaching General Relativity*, Am. J. Phys. **56**, 395 (1988)
 - [3] M. Morris y K. Thorne y U. Yurtsever. *Wormholes, Time Machines and the Weak Energy Condition*. Phys. Rev. Lett. **61**, 1446 (1988)
 - [4] J. Lemos, F. Lobo y S. Quinet. *Morris-Thorne Wormholes with a Cosmological Constant*. Phys. Rev. **D68** 064004 (2003)
 - [5] C. Misner, K. Thorne y J. Wheeler. *Gravitation*. Freeman. San Francisco, (1973)
 - [6] J. Earman. *Bangs, Crunches, Whimpers and Shrieks. Singularities and Acausalities in Relativistic Spacetimes*. Oxford University Press.(1995)

- [7] S. Hawking y G. Ellis. *The Large Scale Structure of Spacetime*. Cambridge University Press. Cambridge, (1973)
- [8] S. Hawking. Commun. Math. Phys. **25**, 152 (1972)
- [9] S. Hawking. Nature. **248**, 30 (1974)
- [10] S. Hawking. Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975)
- [11] N.D. Birrell y P.C.W. Davis. *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge University Press. Cambridge, (1982)
- [12] C. Barceló y M. Visser. *Scalar Fields, Energy Conditions and Traversable Wormholes*. Class. Quantum Grav. **17**, 3843 (2000)
- [13] S. A. Hayward. *Black Holes and Traversable Wormholes: a Synthesis*. **gr-qc/0203051**
- [14] M. Visser. *Lorentzian Wormholes: From Einstein to Hawking*. American Institute of Physics, New York. 1995
- [15] Banados, M., Teitelboim, C. and Zanelli, J., *The Black Hole in Three Dimensional Space Time*. J. Phys. Rev. Lett. **69**, 1849, (1992). **hep-th/9204099**.
- [16] Banados, M., Henneaux, M., Teitelboim, C. and Zanelli, J., *Geometry of the 2+1 Black Hole*. J. Phys. Rev. D **48**, 1506 (1993). **gr-qc/9302012**.
- [17] Carlip, S. *The (2+1)-Dimensional Black Hole*. Class. Quantum Grav. **12**, 2853, (1995). **gr-qc/9506079**.
- [18] Aminneborg, S., Ingemar, B., Brill, D., Holst, S. and Peldám, P. *Black Holes and Wormholes in 2+1 Dimensions*. **gr-qc/9707036**.
- [19] Kim, W.T., Oh, J.J. and Yoon, M.S. *Traversable Wormholes Construction in 2+1 Dimensions*. **gr-qc/0307034**.
- [20] Delgaty, M.S.R. and Mann, R.B. *Traversable Wormholes in (2+1) and (3+1) Dimensions with a Cosmological Constant*. **gr-qc/9404046**.

APÉNDICE A. TENSORES PARA LA MÉTRICA DE AGUJERO DE GUSANO

Para el cálculo de los tensores de Riemann y de Einstein a partir de la métrica se utilizó el paquete grTensor para Mathematica 5.0.

Para nuestra métrica (3), escrita como:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{b(r)}{r}} dr^2 + r^2 d\varphi^2 \quad (128)$$

los simbolos de Christoffel vienen dados por:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (g_{\lambda\beta,\gamma} + g_{\lambda\gamma,\beta} - g_{\gamma\beta,\lambda}) \quad (129)$$

donde hemos utilizado la coma para denotar las derivadas parciales, i.e. $g_{\alpha\beta,\gamma} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}$.
De esta forma, las componentes no nulas de los simbolos de Christoffel son

$$\begin{aligned} \Gamma_{tt}^r &= \left(1 - \frac{b}{r}\right) \Phi' e^{2\Phi} \\ \Gamma_{tr}^t &= \Phi' \\ \Gamma_{rr}^r &= \frac{1}{2} \frac{(b' - \frac{b}{r})}{r - b} \\ \Gamma_{r\varphi}^\varphi &= \frac{1}{r} \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= b - r \end{aligned}$$

Donde las primas denotan derivadas con respecto a la coordenada r . El tensor de Riemann se calcula a partir de los simbolos de Christoffel mediante:

$$R_{\beta\gamma\delta}^\alpha = \Gamma_{\beta\delta,\gamma}^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma,\delta}^\alpha + \Gamma_{\lambda\gamma}^\alpha \Gamma_{\beta\delta}^\lambda - \Gamma_{\lambda\delta}^\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\lambda \quad (130)$$

Obtenemos entonces componentes no nulas:

$$\begin{aligned}
R_{rtr}^t &= \frac{\Phi'}{2r} \left(\frac{b-b'r}{b-r} \right) - (\Phi')^2 - \Phi'' \\
R_{\varphi t \varphi}^t &= (b-r) \Phi' \\
R_{ttr}^r &= -\frac{e^{2\Phi}}{2r^2} \left[\Phi' (b-b'r) + 2r(r-b) \left((\Phi')^2 + \Phi'' \right) \right] \\
R_{\varphi r \varphi}^r &= \frac{(b'r-b)}{2r} \\
R_{tt\varphi}^\varphi &= \frac{e^{2\Phi} (b-r) \Phi'}{r^2} \\
R_{rr\varphi}^\varphi &= \frac{(b-b'r)}{2r^2 (r-b)}
\end{aligned}$$

A partir del tensor de Riemann construimos el tensor de Ricci, dado por:

$$R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\gamma\beta}^\gamma \quad (131)$$

Para nuestra métrica tenemos las componentes:

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= \frac{e^{2\Phi}}{2r^2} \left[\Phi' (2r-b-b'r) + 2r(r-b) \left((\Phi')^2 + \Phi'' \right) \right] \\
R_{rr} &= \frac{1}{2r^2 (b-r)} \left[(b-b'r) (1+r\Phi') + 2r^2 (r-b) \left((\Phi')^2 + \Phi'' \right) \right] \\
R_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{2r} [2\Phi' r (b-r) + b'r - b]
\end{aligned}$$

La contracción del Tensor de Ricci produce el Escalar de Curvatura,

$$R = R_{\alpha}^{\alpha}. \quad (132)$$

En este caso, este tiene el valor

$$R = \frac{1}{r^3} [2\Phi'' r^2 (b-r) + \Phi' r (b'r - 2r + b) + 2\Phi'^2 r^2 (b-r) + b'r - b].$$

Por último, utilizando los tensores anteriores, construimos el tesnor de Eintein, definido por

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R. \quad (133)$$

Las componentes no nulas del tensor de Einstein son entonces

$$\begin{aligned}
G_{tt} &= \frac{1}{2r^3} e^{2\Phi} [-b + rb'] \\
G_{rr} &= \frac{\Phi'}{r} \\
G_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{2} \left[\Phi' (b-rb') + 2r(r-b) \left((\Phi')^2 + \Phi'' \right) \right].
\end{aligned}$$

APÉNDICE B. CAMBIO DE BASE PARA EL TENSOR DE EINSTEIN

La base asociada con las coordenadas (t, r, φ) es denotada por $(\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi)$ o en el lenguaje de la geometría diferencial como:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_t &= \frac{\partial}{\partial t} \\ \mathbf{e}_r &= \frac{\partial}{\partial r} \\ \mathbf{e}_\varphi &= \frac{\partial}{\partial \varphi}\end{aligned}$$

La base de vectores ortonormales que utilizaremos está definida por la transformación : $\mathbf{e}_{\hat{\alpha}} = \Lambda_{\hat{\alpha}}^{\beta} \mathbf{e}_{\beta}$, donde

$$\Lambda_{\hat{\alpha}}^{\beta} = \text{diag} \left[e^{-\Phi}, \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2}, \frac{1}{r} \right] \quad (134)$$

Explícitamente tenemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_{\hat{t}} &= e^{-\Phi} \mathbf{e}_t \\ \mathbf{e}_{\hat{r}} &= \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_{\hat{\varphi}} &= \frac{1}{r} \mathbf{e}_\varphi\end{aligned}$$

De esta manera para cambiar el tensor de Einstein calculado en el Apéndice A a la base ortonormal debemos utilizar la transformación:

$$G_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \Lambda_{\hat{\alpha}}^{\mu} \Lambda_{\hat{\beta}}^{\nu} G_{\mu\nu} \quad (135)$$

Tenemos entonces explícitamente:

$$\begin{aligned}G_{\hat{t}\hat{t}} &= \Lambda_{\hat{t}}^{\mu} \Lambda_{\hat{t}}^{\nu} G_{\mu\nu} = \Lambda_{\hat{t}}^t \Lambda_{\hat{t}}^t G_{tt} \\ &= e^{-\Phi} e^{-\Phi} \frac{1}{2r^3} e^{2\Phi} [-b + rb'] \\ &= \frac{1}{2r^3} [b'r - b] \\ \\ G_{\hat{r}\hat{r}} &= \Lambda_{\hat{r}}^{\mu} \Lambda_{\hat{r}}^{\nu} G_{\mu\nu} = \Lambda_{\hat{r}}^r \Lambda_{\hat{r}}^r G_{rr} \\ &= \left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{\Phi'}{r} \\ \\ G_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} &= \Lambda_{\hat{\varphi}}^{\mu} \Lambda_{\hat{\varphi}}^{\nu} G_{\mu\nu} = \Lambda_{\hat{\varphi}}^{\varphi} \Lambda_{\hat{\varphi}}^{\varphi} G_{\varphi\varphi} \\ &= \left(\frac{1}{r^2}\right) \frac{1}{2} \left[\Phi' (b - rb') + 2r(r - b) \left((\Phi')^2 + \Phi'' \right) \right] \\ &= \frac{1}{2r^2} \left[\Phi' (b - rb') + 2r(r - b) \left((\Phi')^2 + \Phi'' \right) \right]\end{aligned}$$

De esta manera, al cambiar de base, las nuevas componentes del tensor de Einstein son finalmente:

$$\begin{aligned}G_{\hat{t}\hat{t}} &= \frac{1}{2r^3} [b'r - b] \\ G_{\hat{r}\hat{r}} &= \left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{\Phi'}{r} \\ G_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} &= \frac{1}{2r^2} \left[\Phi' (b - rb') + 2r(r - b) \left((\Phi')^2 + \Phi'' \right) \right]\end{aligned}$$

APÉNDICE C. MÉTRICA PARA EL EXTERIOR DEL AGUJERO DE GUSANO

Para el exterior del agujero de gusano consideramos un espacio-tiempo vacío, por lo que utilizamos un tensor momento-energía nulo $T_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = 0$. Esta condición se reduce a tomar:

$$\rho(r) = \tau(r) = p(r) = 0$$

De esta manera las ecuaciones de campo se convierten en:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2r^3} [b'r - b] - \Lambda_{ext} \\ 0 &= -\left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{\Phi'}{r} - \Lambda_{ext} \\ 0 &= \frac{1}{2r^2} \left[\Phi' (b - rb') + 2r(r - b) \left((\Phi')^2 + \Phi'' \right) \right] + \Lambda_{ext} \end{aligned}$$

De la primera de estas ecuaciones tenemos la ecuación diferencial

$$\frac{1}{2r^3} [b'r - b] = \Lambda_{ext},$$

de la cual, obtenemos por integración

$$b(r) = \Lambda_{ext} r^3 + Kr \tag{136}$$

donde K es una constante. Reemplazando en la segunda ecuación tenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= -\left(1 - \frac{\Lambda_{ext} r^3 + Kr}{r}\right) \frac{\Phi'}{r} - \Lambda_{ext} \\ 0 &= -\left(1 - \Lambda_{ext} r^2 + K\right) \frac{\Phi'}{r} - \Lambda_{ext} \end{aligned}$$

Es decir:

$$\Phi' = -\frac{r\Lambda_{ext}}{(1 - \Lambda_{ext} r^2 + K)}$$

$$\Phi = -\int \frac{r\Lambda_{ext}}{(1 - \Lambda_{ext} r^2 + K)} dr$$

Haciendo el cambio de variable: $u = 1 - \Lambda_{ext} r^2 + K$ tenemos:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln u + K_1 \\ \Phi(r) &= \frac{1}{2} \ln (1 - \Lambda_{ext} r^2 + K) + K_1 \end{aligned}$$

donde K_1 es otra constante. De esta manera, el elemento de línea en el exterior del agujero tendrá la forma:

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{b(r)}{r}} dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

$$ds^2 = -e^{2\left[\frac{1}{2} \ln(1 - \Lambda_{ext} r^2 + K) + K_1\right]} dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{\Lambda_{ext} r^3 + Kr}{r}\right)} + r^2 d\varphi^2$$

$$ds^2 = -e^{2K_1} (1 - \Lambda_{ext} r^2 + K) dt^2 + \frac{dr^2}{(1 - \Lambda_{ext} r^2 + K)} + r^2 d\varphi^2$$

Ahora bien, al comparar con la conocida solución BTZ se observa que las constantes de integración que aparecen deben ser

$$K = -M - 1 \qquad K_1 = 0$$

Por lo tanto la métrica exterior será finalmente

$$ds^2 = -(-M - \Lambda_{ext}r^2) dt^2 + \frac{dr^2}{(-M - \Lambda_{ext}r^2)} + r^2 d\varphi^2$$